

Analyse der Coronastatistiken. Teil 1

Hans-Gert Gräbe, Leipzig

Version vom 13. April 2020, mit kleinen Korrekturen vom 31. Mai 2020

Dieser Text bezieht sich auf eine erste Version¹ der im Verzeichnis <http://leipzig-data.de/demo/Corona-20/Code> verfügbaren Materialien.

1 Datenbasis

Als Datenbasis werden die von der Johns Hopkins Universität (JHU) als Excel-Datei veröffentlichten Daten² zur Entwicklung der weltweit registrierten Covid-19-Fälle verwendet. Die Statistik listet pro Land und Tag die kumulierte Zahl der positiv Getesteten³, der Genesenen und der Todesfälle auf.

Die Statistiken sind natürlich zu hinterfragen, da sich jedem Physiker die Haare sträuben würden, wenn die Debatte auf die messmethodische Grundlage dieser Datenerhebungen, also die Einheitlichkeit des Modells, zu sprechen kommt. Dennoch gibt es wohl derzeit nichts Besseres. Auch die Rolle der privaten (!) JHU und deren enge Verflechtung mit dem „Datenadel“ aus dem Silicon Valley kann hinterfragt werden, siehe dazu (Rügemer 2020). Spannend auf der anderen Seite, dass es genau dieser „Datenadel“ ist, der solche Daten zusammenträgt und der Allgemeinheit – im Gegensatz etwa zu der im deutschen Sprachraum viel zitierten <https://statista.com> oder gar der WHO – in einem maschinenlesbaren Format ohne Bezahlschranken zur Verfügung stellt.

Eine solche kritische Würdigung muss diesem Text vorangestellt werden, um die folgenden Rechnungen ins rechte Licht zu rücken, denn sie sind nicht als Beitrag zur Corona-Debatte selbst gedacht, wie dies in den ersten Tagen mehrfach falsch verstanden wurde, sondern soll die Möglichkeiten aufzeigen, die fortgeschrittene Oberstufenschülerinnen und -schüler heute zu einer eigenen Analyse von Daten haben. Der komplexe Gegenstand „CAS in der Schule“ ist in meinem Buch (Gräbe 2018) genauer dargestellt.

¹Nachtrag: Es wurden bewusst nur kleine Korrekturen an dieser erste Version angebracht, um die spezifische Situation einer unklaren Zukunft zu erhalten, auf die mit einer ersten Parameterschätzung Ende März 2020 und einem Update am 13.04.2020 reagiert wurde. Der Wert der Schätzungen auf realen Daten wird im Teil 3 diskutiert.

²Siehe deren github-Projekt <https://github.com/CSSEGISandData/COVID-19>.

³Nachtrag: statt „Infizierte“, wie in der ersten Auflage noch geschrieben. Dies ist hier konsequent an allen Stellen ersetzt.

2 Installation

Zunächst muss das git Repo der JHU lokal geklont und der Pfad im Skript `extractData.pl` eingetragen werden. Die Daten werden für ausgewählte Länder mit diesem Perl-Skript für die weitere Verarbeitung aufbereitet und in einer Datei `BasicData.txt`⁴ gespeichert, um dann mit dem freien CAS *Maxima* weiterverarbeitet zu werden.

3 Datentransformation

In der Datei `BasicData.txt` sind die Daten für jedes der ausgewählten Länder in einem Array mit drei Einträgen (`infected`, `recovered`, `dead`) gespeichert, die im Maxima-Skript `skript.m`⁵ in einer Funktion `getland(Land)`⁶ zunächst einmal zu Paaren (t, y_t) ergänzt werden, wobei t für den Tag des Jahres 2020 ($1 = 01.01.2020$, **Tag 100 ist also Donnerstag, der 9. April**) und y_t für die Zahl der Fälle aus dem jeweiligen Record stehen.

4 Fitting

Alle Grafiken zu Prognosen der Daten, die ich bisher gesehen habe, gehen von einer „Glockenkurve“ aus. Das kann natürlich nur die Entwicklung der Zuwächse pro Tag abbilden, die aus den kumulierten Daten zunächst als $d_t = y_t - y_{t-1}$ extrahiert werden müssen. Dies geschieht mit der im Skript definierten Maxima-Funktion `Delta`⁷.

Zur Abschätzung des Verlaufs längs einer Glockenkurve wird üblicherweise die Statistikfunktion $C \cdot \exp\left(-\left(\frac{t-m}{s}\right)^2\right)$ verwendet, die ich als Kurvenschar $f(t) = \exp\left(c - \left(\frac{t-m}{s}\right)^2\right)$ zur Parameterschätzung auf die Daten (t, d_t) ansetze. Die (kumulierten) Originaldaten (t, y_t) sollten dann auf die Funktion

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x \exp\left(c - \left(\frac{t-m}{s}\right)^2\right) dt \\ &= \exp(c) \cdot s \cdot \int_{-\frac{m}{s}}^{\frac{x-m}{s}} \exp(-u^2) du \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \exp(c) \cdot s \cdot \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x-m}{s}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{m}{s}\right)\right) \end{aligned}$$

matchen, wobei $\operatorname{erf}(x)$ für die Fehlerfunktion steht und im zweiten Schritt die Variablensubstitution $u = \frac{x-m}{s}$ mit $du = s \cdot dt$ erfolgte.

⁴Nachtrag: Inzwischen in `BasicData-Maxima.txt` umbenannt, da die Möglichkeiten des CAS *Maxima* zum nichtlinearen Fitting beschränkt sind und gelegentlich meinen Laptop insgesamt zum Stillstand bringen.

⁵Dies ist eine reine Textdatei mit Code-Schnipseln, die nicht für den Batchbetrieb konzipiert ist.

⁶Nachtrag: Diese Funktion wurde inzwischen umgeschrieben und gibt nun eine größere Menge von Datenreihen zurück, die für verschiedene Auswertungszwecke aus den drei originalen Datenreihen der JHU gewonnen werden.

⁷`reverse(rest(reverse(l)))` entfernt das letzte Element der Liste, `append([0], ...)` fügt vorn eine 0 an, womit eine Liste l_1 entsteht, in der alle Einträge um eine Position nach rechts verschoben sind. $l - l_1$ berechnet die Differenz der Listen, was in Maxima (und anderen CAS) als Subtraktion der entsprechenden Vektoren implementiert ist.

Nun sind die Parameter (c, s, m) dieser Kurvenschar so zu fitten, dass die ermittelte Kurve besonders gut auf die Daten passt. In *Maxima* kann dazu das Paket *lsquares* verwendet werden.

Wir hätten natürlich auch versuchen können, die Originaldaten auf die Schar $h(t)$ zu fitten, aber Fitting auf nicht polynomialen Kurvenscharen ist eine schwierige und numerisch wenig stabile Angelegenheit, bei der Maxima schnell an seine Grenzen kommt (und die Ergebnisse anderer CAS sehr genau zu analysieren sind, da die Fitting-Ergebnisse stark von Startwerten der dabei eingesetzten Verfahren abhängen).

Maxima kommt auch beim Fitting der Schar $f(t)$ zu keinem Ergebnis. Einen einfacheren, nämlich quadratischen Zusammenhang $g(t) = c - \left(\frac{t-m}{s}\right)^2$ erhält man, wenn man zu Paaren $(t, \log(d_t))$ übergeht. Damit lassen sich dann die Fittingparameter weitgehend stabil berechnen. Dafür müssen aber vorher Datenpunkte aussortiert werden, wo $d_t = 0$ ist.

Generell kann es sinnvoll sein, für ein gutes Fitting Datenpunkte unterhalb einer Schwelle auszusortieren. Eine solche Schwelle S ist als weiterer Parameter im Skript in der Funktion `FittingDelta(G,S)`⁸ vorgesehen. Für die meisten Datensätze ist die Schwelle 50 eine gute Wahl. G ist die Liste (t, y_t) der zu fittenden Datenpunkte.

Details sind im Skript `skript.m` zu finden.

5 Ergebnisse

Die Rechnungen werden für jedes der Länder nun wie folgt ausgeführt:

1. Fasse mit `l:getData(Land)` die drei Datensätze für das Land als Tripel von Listen (t, y_t) zusammen.
2. Berechne für jeden der drei Datensätze mit `getFittingFunctions(l,S)` das Fitting auf $(t, \log(d_t))$ gegen die Funktion $g(t)$ und verwende die berechneten drei Fittings, um Funktionen $h_1(t)$ (für positiv getestet), $h_2(t)$ (für genesen) und $h_3(t)$ (für verstorben) zu schätzen.
3. Erzeuge daraus einen Plot, welcher die Datenpunkte und die drei Kurven in verschiedenen Farben (rot für positiv getestet, grün für genesen, blau für verstorben) ausgibt.

Bei erfolgreichem Fitting ist eine gute Übereinstimmung der jeweiligen Kurve⁹

$$h(t) = A(\operatorname{erf}(B(t - m)) + 1)$$

mit den Datenpunkten zu verzeichnen. Die berechneten Parameter haben folgende Bedeutung:

- m – Tag, an dem die Spitze in den Inkrementdaten erreicht ist.
- $B = \frac{1}{s} - \sigma = \frac{s}{\sqrt{2}}$ ist die Standardabweichung.

⁸Nachtrag: Mit der Änderung von `getData(Land)` wurde auch diese Funktion verändert, da die Datenreihen (t, d_t) nun bereits in `getData(Land)` berechnet werden.

⁹Für $x = \frac{m}{s} \approx 10$ kann $\operatorname{erf}(x) = 1$ gesetzt werden. Ist dieser Wert im Fitting deutlich anders, ist das Fitting unbrauchbar.

- $2A$ – Zahl der am Ende insgesamt betroffenen Personen.

Auf der Basis der Daten vom 13.04.2020 lassen sich folgende Szenarien (!) für die Länder Deutschland, Italien, Spanien, Österreich und Schweden erstellen, siehe auch die Abbildungen. Alles begann in der chinesischen Provinz Hubei (mit 58.5 Mio. Einwohnern hat sie eine mit Italien vergleichbare Einwohnerzahl). Auch die dortige Entwicklung ist dargestellt¹⁰.

	m	s	A
Deutschland			
positiv getestet	91.94	13.51	68896
genesen	97.01	8.58	32967
verstorben	103.11	14.80	3241
Italien			
positiv getestet	88.34	16.30	87225
genesen	101.35	21.97	31380
verstorben	90.31	16.07	11520
Spanien			
positiv getestet	91.11	12.32	90706
genesen	101.77	15.78	54984
verstorben	93.33	11.88	9611
Österreich			
positiv getestet	88.55	12.09	6651
genesen	100.02	10.68	5319
verstorben	98.62	17.12	294
Schweden			
positiv getestet	101.08	20.75	8870
genesen	112.73	20.12	4402
verstorben	95.36	9.09	459
China, Provinz Hubei			
positiv getestet	41.45	13.12	26139
genesen	bad fitting		
verstorben	46.74	15.72	1759

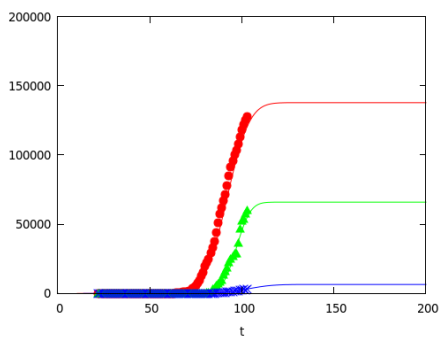
Natürlich müsste am Ende die Zahl der Infizierten mit der Summe der Zahlen der Genesenen und der Verstorbenen übereinstimmen. Die Schätzungen sind von einer solchen Invarianzforderung weit entfernt, was ein Licht auf die prognostische Qualität der Schätzungen für die weitere Zukunft (drei bis vier Wochen, also 30 Tage) wirft. Weitere Ergebnisse zeigen, dass selbst einem ohne Fehlermeldung zurückgegebenen Fitting nicht zu trauen ist und die Güte des Fittings genauer analysiert werden muss. Die Ergebnisse für die Provinz Hubei legen nahe, dass das verwendete Datenmodell für die Schätzung generell wenig geeignet ist, da die Zahl der Infektionen selbst im Nachgang zu klein geschätzt wird und für die Zahl der Genesenen kein brauchbares Fitting gefunden wird, obwohl sich die Zahlen in Bereichen bewegen, wie sie auch für europäische Länder charakteristisch sind.

¹⁰Maxima hängt sich bei der Berechnung dieses Fittings allerdings schnell auf.

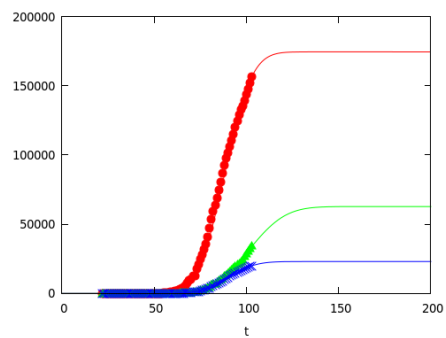
6 Literatur

- Hans-Gert Gräbe. Computeralgebra im Abitur. Reihe „Eagle Starthilfe“. Eagle Verlag, Leipzig 2018. Siehe <https://hg-graebe.de/CAimAbitur/index.html>.
- Maxima. <http://maxima.sourceforge.net/de/>. Das CAS ist in Linux-Distributionen über den Paketmanager leicht zu installieren.
- Werner Rügemer. „Die USA haben das sicherste Gesundheitssystem der Welt“ – Die Johns Hopkins University und das globale Pandemien-Management. 01.04.2020. <https://www.nachdenkseiten.de/?p=59825>

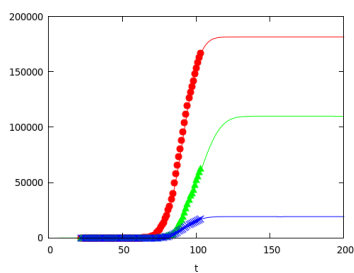
7 Grafiken



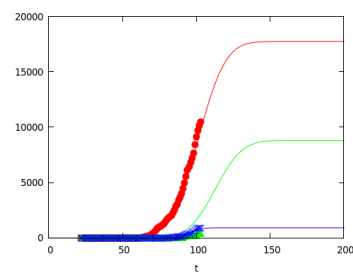
Szenario für Deutschland
(82.9 Mio. Einwohner)



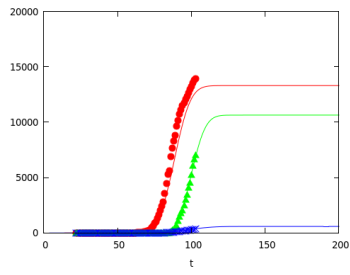
Szenario für Italien
(60.4 Mio. Einwohner)



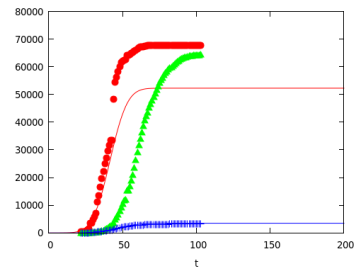
Szenario für Spanien
(46.7 Mio. Einwohner)



Szenario für Schweden
(66.4 Mio. Einwohner)



Szenario für Österreich
(8.85 Mio. Einwohner)



Szenario für China, Provinz Hubei
(58.5 Mio. Einwohner)